学校编号：10384 分类号：__________ 密级：__________
学 号：17020051301626 UDC：__________

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

k 悬挂点树关于连通度指标的极值问题研究

The extremal problem of connectivity index in trees with k pendant vertices

任 鹭

指导教师姓名： 张莲珠 教授

专 业 名 称： 应 用 数 学

论文提交日期： 2008 年 5 月

论文答辩日期： 2008 年 6 月

学位授予日期： 2008 年 月

答辩委员会主席： _________

评 阅 人： _________

2008 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸制版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1. 保密（ ），在　　　年解密后适用本授权书。

2. 不保密（ ）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

目录

中文摘要 iii

英文摘要 v

第一章　引言 1

第二章　k 悬挂点树关于 Randić 指标的极大图性质 6

§2.1　预备知识 6

§2.2　k 悬挂点树关于 Randić 指标的极大图性质 7

§2.3　$\Delta = 5$ 的 k 悬挂点树关于 Randić 指标的极大图性质 23

第三章　极图性质在刻画极图的应用 27

参考文献 32

致谢 35

Contents

Abstract(in Chinese) .... **iii**

Abstract(in English) .... **v**

Chapter Ⅰ **Introduction** **1**

Chapter Ⅱ **Properties of the trees of k-pendant vertices with the maximum Randić index** **6**

§2.1 **Preliminary knowledge** **6**

§2.2 **Properties of the trees with the maximum Randić index** **7**

§2.3 **Properties of the maximum Randić index trees with respect to Δ=5** **23**

Chapter Ⅲ **Some maximum Randić index trees** **27**

References **32**

Acknowledgements **35**

摘 要

分子的拓扑指标可以统计地反映分子的物理和化学性质。不同的分子拓扑指标反映的是该分子的不同性质，它们在 QSPR（ quantitative structure-property relations ）和 QSAR（ quantitative structure-activity relations ）中有着重要的作用。为了利用数学方法研究分子结构与化学物理性质之间的关系，人们提出一些相关的分子图的拓扑指标 [14,15] 。最著名的拓扑指标有 Wiener 指标、Hosoya 指标和 Randić 指标。

一个分子结构可以表示为一个图 G=(V,E), 其拓朴指标与相应的图的不变量对应。图 G 的 Randić 指标定义为

$$R = R(G) = \sum_{u,v} \frac{1}{\sqrt{d_G(u)d_G(v)}},$$

其中 $d_G(u)$ 是图 G 中的顶点 u 的度，和式遍历 G 中所有的相邻点对。

1975 年, 为了研究有机分子尤其是烷烃的碳原子骨架的分支程度, Milan Randić 提出了“分支指标” [16]$R = R(G)$ 。 R 值对 QSPR 和 QSAR 的研究有着巨大的作用，它的广泛应用远远超出当初 Randić 提出这个指标的最初目的（即用数量测定“分支”的思想 [17,18,19,20] ）。 Randić 已经注意到 R 和烷烃的物理化学性质有着很大的联系。在研究烷烃中， Randić 引进了 $R(G)$ ，后来人们称为 Randić 指标。他指出如果 C_nH_{2n+2} 按 $R(G)$ 递减排序，则它们的分支程度是增加的 [1,16] 。 Randić 指标可用来衡量碳原子结构的分支程度，这个特征关系到分子的表面积，分子的表面积则相当大地影响有机分子的物理化学性质。

从数学的角度, 我们首先关心的问题就是在一类图中，Randić 指标的极值是多少？达到极值的极图是哪些图？这两个问题远远没有想象的那么简单，而且往往极图的结构都是非常有意思的图。许多化学家和数学家都致力研究 Randić 指标的极值和刻画它的极图, 因为这些问题的解决具有很强的应用背景。近几年，Randić 指标在医药方面的应用也层出不穷。

本文考虑的是 k 悬挂点树关于连通度指标的极值问题。在 k 悬挂点的 n 阶树中, 对于 $n \geq 3k-2$, 这类图的极值与极图已被刻画 [11] 。本文主要研究当 $n < 3k-2$ 的具有最大 Randić 指标的极图。我们通过寻找适当的变换研究 n 个顶点 k 个悬挂点的树类中，在 $n < 3k-2$ 的条件下，Randić 指标的极大值和极大图结构。利用我们所得的性质来逼近极大图的结构特征，可以把一些具有最大的 Randić 指标且有 k 个悬挂点的 n 阶树缩小在一个很小的集合中，再通过比较将具有最大的 Randić 指标且有 k 个悬挂点的 n 阶树找出来。

关键词: k 悬挂点树， Randić 指标，极大树

Abstract

Some topologic indices of a molecular structure can reflect its physico-chemical properties. Different topologic index reflects different properties. They make great contributions to the study of QSPR (quantitative structure-property relations) and QSAR (quantitative structure-activity relations). To research into the relationship between the structure of a molecule and its physico-chemical properties by mathematical methods, researchers put forward to some topological indices of molecular structure which relate to its physico-chemical properties. The most well-known are Wiener index, Hosoya index and Randić index.

A molecular structure can be regard as a graph G. Randić index is a graph invariant defined as

$$R = R(G) = \sum_{u,v} \frac{1}{\sqrt{d_G(u)d_G(v)}},$$

where $d_G(u)$ denotes the degree of a vertex u in the graph G, and the summation goes over all pairs of adjacent vertices of G.

In 1975, in studying the extent of branching of the carbon-atom skeleton of saturated hydrocarbons. Milan Randić proposed an important molecular topological index-branching index. The quantity R is well correlated with a variety of physico-chemical properties of molecule, and makes great contributions to the stduy of QSPR and QSAR. Randić noted that R is well correlated with a variety of physico-chemical properties of alcanes. Randić found when C_nH_{2n+2} is decreasing by $R(G)$, their extents of branching is increasing. The Randić index can measure the extent of branching of the carbon-atom. This influences the physico-chemical properties of molecule.

From a mathematical point of view, the first question to be asked is which are the extremal R-values in classes of graphs, and which are the graphs from these classes with extremal R. Finding the answers is not easy, and sometimes the extremal graphs have quite unusual and interesting structures. Many chemists and mathematicians are doing researches in finding the answers,because they noticed that there is a good correlation between the Randić index R and several physico-chemical properties of a molecule. In subsequent years countless applications of R were reported,most of them concerned with medicinal and pharmacological issues.

In this thesis, we study the extremal problem of index in trees with k pendant vertices. The trees of order n with k pendant vertices which have maximum Randić index in the case $n \geq 3k-2$ were characterized in [11]. We study the case $n < 3k-2$. We use some proper transformations to study the problem of extremal values of the Randić index of trees with n order and k pendant vertices($n < 3k-2$). We can find some extremal trees with n order and k pendant vertices ($n < 3k-2$) quickly and easily by making use of the properties we find.

Keywords : trees of k pendant vertices, Randić index, the maximum trees

第一章 引言

图论，提到这个主题的文字记载最早出现在 Euler 的著作中。 1736 年， Euler 解决了著名的哥尼斯堡七桥问题，从而使他成了图论和拓扑学的创始人。图论不仅是一门非常有趣的学科，而且应用性很强，在物理、化学、计算机、心理学、经济学等学科的一些领域都有应用。

化学图论是图论研究的重要领域之一。化学图论主要是利用图论的方法来研究化学分子图的拓扑指标、分子结构和化学物理性质之间的关系。著名化学家 Vlado Prelog 在《 Chemical Applications of Graph Theory 》这样描述："用图形表示图是如此简单易懂，以致于化学家们常常只满足于检验、讨论它们，而不太关注它们的代数方面，然而明显地，一定程度的熟悉图论对深刻理解它们的性质是必要的。" [2] 。我们对图论了解的越多，就能更广更好地将它应用在化学上。

分子的拓扑指标可以统计地反映分子的物理和化学性质。不同的分子拓扑指标反映的是该分子的不同性质，它们在 QSPR（ quantitative structure-property relations ）和 QSAR（ quantitative structure-activity relations ）中有着重要的作用。为了利用数学方法研究分子结构与化学物理性质之间的关系，人们提出相当多的拓扑指标 [14,15] 。最著名的拓扑指标有 Wiener 指标、 Hosoya 指标和 Randić 指标。

通过对化合物的分子图的拓扑指标的研究 [15,21,22], 从理论上探讨分子的化学物理性质, 也预言某些分子的存在性, 一直是数学化学中的热门问题. 正因为有着如此重要的应用背景，拓扑指标一直受到众多数学家化学家和其他学者的关注，并有大量的研究成果 [3,6,14,15,23,24] 。近二、三十年来对图的拓扑指标的研究也是图论研究的一个重要领域。

分子结构可以用图表示。一个图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \psi_G)$ ，其中 $V(G)$ 是非空的顶点集， $E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集，而 ψ_G 是关联函数，它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对（不必相异）。若 e 是一条边，而 u 和 v 是使得 $\psi_G(e) = uv$ 的顶点，则称 e 连接 u 和 v ；顶点 u 和 v 称为 e 的端点。

图 G 的 Randić 指标，也称为连通指标 (connectivity index) 定义为

$$R = R(G) = \sum_{u,v} \frac{1}{\sqrt{d_G(u)d_G(v)}},$$

其中 $d_G(u)$ 是图 G 中的顶点 u 的度，和式遍历 G 中所有的相邻点对。

1975 年，为了研究有机分子尤其是烷烃的碳原子骨架的分支程度，Milan Randić 提出了“分支指标” [16]$R = R(G)$ 。 R 值对 QSPR 和 QSAR 的研究有着巨大的作用，它的广泛应用远远超出当初 Randić 提出这个指标的最初目的（即用数量测定“分支”的思想 [17,18,19,20] ）。Randić 已经注意到 R 和烷烃的物理化学性质有着很大的联系。在研究烷烃中，Randić 引进了 $R(G)$ ，后来人们称为 Randić 指标。他指出如果 C_nH_{2n+2} 按 $R(G)$ 递减排序，则它们的分支程度是增加的 [1,16] 。 Randić 指标可用来衡量碳原子结构的分支程度，这个特征关系到分子的表面积，分子的表面积则相当大地影响有机分子的物理化学性质。

从数学的角度，我们首先关心的问题就是在一类图中， Randić 指标的最小值和最大值是多少？并且在这类图中，达到最小和最大 R 值的图是哪些图？即在一类图中，Randić 指标的极值是多少？达到极值的极图是哪些图？这两个问题远远没有想象的那么简单，而且往往极图的结构都是非常有意思的图。许多化学家和数学家都致力研究刻画 Randić 指标和广义 Randić 指标的极值和极图，因为这些问题的解决具有很强的应用背景。近几年， Randić 指标在医药方面的应用也层出不穷。

下面我们介绍一些相关的已知结果。这些结果在 X.Li 和 I.Gutman 的专著 [2] 中以及 Xueliang Li,Yongtang Shi 和 Lusheng Wang 的论文 [27] 中有综合论述。以下一些名词和记号参考了 [2,11,12,25,26,27] 。

G 的顶点 u 的度 $d_G(u)$ 是指 G 中与 u 关联的边的数目。 $V_i(G) = \{v : v \in V(G), d_G(v) = i\}$, $n_i(G) = |V_i(G)|$ 。一个图 G 的最大度和最小度分别记为 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 。如果 G 中度为 $d_i(i = 1, 2, ..., t)$ 的顶点有 a_i 个，其中 $\Delta(G) = d_1 > d_2 > ... > d_t = \delta(G)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{t} a_i = n$ 定义度序列为 $D(G) = [d_1^{a_1}, d_2^{a_2}, ..., d_t^{a_t}]$ ，若 $a_i = 1$ ，为方面起

见，用 d_i 代替 $d_i^{a_i}$ 。通常用 T 来表示一棵树，即无圈的连通图。 T 中度为 1 的顶点称为 T 悬挂点，连有悬挂点的边称为悬挂边。路 P_n 是只有两个悬挂点的 n 阶树。星图 S_n 表示有 $n-1$ 个悬挂点的树。彗星是由一个星图和一条悬挂路组成。对于任意 n 且 $2 \le n_1 \le n-1$ ，记 $CS(n,n_1)$ 表示有 n_1 个悬挂点的有 n 个顶点的彗星。即由路 P_{n-n_1} 与 n_1+1 阶的星图 S_{n_1+1} 组成，其中 P_{n-n_1} 的一个端点与 S_{n_1+1} 的一个悬挂点相同。

Hansen 和 Mélot[2,8,27] 证明了定理 1.1 。

定理 1.1 [2,8,27] 在有 n_1 个悬挂点的 $n(n \ge 3)$ 阶树中, 若 $n_1 < n-1$, 则 $CS(n,n_1)$ 具有最小 Randić 指标。

给定顶点数和悬挂点数的树类是树中重要的一类图。定理 1.1 实际上证明了该类树中具有最小的 Randić 指标的树。 2004 年，李学良等 [9] 给出次小 Randić 指标及相应极图。吴小霞等 [10] 给出了第三小的 Randić 指标及相应极图。而对于最大的 Randić 指标，张莲珠等在 [11] 在 $n \ge 3k-2, k \ge 3$（ k 指悬挂点数）的条件下，用图的运算和比较的方法确定了 Randić 指标的上确界及相应极图。而在 $n < 3k-2$ 的化学树中，张莲珠等 [28] 也给出了具有最大 Randić 指标的极图与极值。

定理 1.2 [2,9,27] 令 T 是有 n_1 个悬挂点的 $n(n \ge 3)$ 的树。若 $n_1 < n-2$ 并且 $T \ncong CS(n,n_1)$, 则

$$R(T) \ge \sqrt{n_1} + (\sqrt{2}-2)\frac{1}{\sqrt{n_1}} + \frac{n-n_1-3}{2} + \sqrt{2}.$$

当且仅当 T 是由一条长为 $n-n_1+1$ 的路 $v_1v_2...v_i...v_{n-n_1+1}v_{n-n_1+2}$ 与一个以 v_i（任意 $i=3,...,n-n_1$ ）为中心的星图 S_{n_1-1} 连接而成。

定理 1.3 [10,27] 在有 n_1 个悬挂点的 n 阶树中，由一条长为 $n-n_1-1$ 的路在一个端点加上两条悬挂边，另一端点加上 n_1-2 个悬挂边组成的树具有第三小 Randić 指标。

记 $\mathcal{T}_{n,k} = \{T : T$ 是有 k 个悬挂点的 n 阶树 $\}$ 。若树 T 有 k 个悬挂点且对于 $V(T) \setminus V_1(T)$ 中的任意顶点 v ， $d_T(v) = 3$ ，则称 T 为 $(k,3)$- 正则图。令 $T^*_{n,k}$ = $\{T : T$ 是在 $(k,3)$- 正则图的每一个悬挂边至少加一个新的顶点，并且新的顶点数

为 $n-2k+2$ 的图 $\}$ 。

定理 1.4 [11] 对于任意 $T \in \mathcal{T}_{n,k}$ 并且 $n \geq 3k-2, k \geq 3$, 有

$$R(T) \leq \frac{n}{2} + \frac{(3\sqrt{2}+\sqrt{6}-7)k}{6}.$$

等式成立当且仅当 $T \in \mathcal{T}^*_{n,k}$ 。

定理 1.5 [28] 若 T 是具有 k 个悬挂点的 n 阶化学树（ $\Delta \leq 4$ ）且 $n < 3k-2$ 。若 $\frac{3k-2}{2} \leq n < 3k-2$ 且 $k = 4p + r(1 \leq r \leq 4) \geq 8$, 则

$$R(T) \leq \begin{cases} \frac{n_2}{\sqrt{2}} + \frac{k-n_2}{\sqrt{3}} + \frac{n_2}{\sqrt{6}} + \frac{2n_3-k}{\sqrt{9}} + \frac{k-n_3}{\sqrt{12}} + \frac{n_4-1}{\sqrt{16}}, & 2n_3-k \geq 0; \\ \frac{n_2}{\sqrt{2}} + \frac{k-n_2}{\sqrt{3}} + \frac{n_2-4-r}{\sqrt{6}} + \frac{4-r}{\sqrt{8}} + \frac{n_3}{\sqrt{12}} + \frac{n_4-1}{\sqrt{16}}, & 2n_3-k < 0, n_2 \neq 0; \\ \frac{2n_3}{\sqrt{3}} + \frac{k-2n_3}{\sqrt{4}} + \frac{n_3}{\sqrt{12}} + \frac{n_4-1}{\sqrt{16}}, & 2n_3-k < 0, n_2 = 0. \end{cases}$$

在 [28] 中也给出了相应的极图，这里不详述。

对于 Randić 指标，研究的图类还有给定顶点数 [2,3,5,9,27,30,31] ，给定顶点数与边数 [32,33] , 单圈图 [2,5,27,29,32] , 双圈图 [2,5,27] , 三圈图 [2,5,27] 等等。Bollobás 和 Erdös[3] 证明了定理 1.6

定理 1.6 [2,3,27] 令 G 是 n 阶图并且不包含孤立点。则

$$R(G) \geq \sqrt{n-1}.$$

等号当且仅当 G 是星图。

定理 1.6 显然对树也同样成立。

定理 1.7 [2,4,5,27] 令 T 是一棵 n 阶树，则

$$R(T) \leq \frac{n+2\sqrt{2}-3}{2}.$$

且等式当且仅当 T 是一条路。

定理 1.7 是喻平第一个证明的。随后 Caporossi 等人用另外一种方法也证明了定理 1.7 ，并且确定了具有第二大 Randić 指标的树 [2,5,27] 。

定理 1.8 [2,5,27] 在有 $n(n \geq 7)$ 个顶点的树中，度序列为 $[3, 2^{n-4}, 1^3]$ 的树具有第二大 Randić 指标的树。

定理 1.9 [29] 在所有 $n(n \geq 3)$ 阶单圈图中， S_n^+ 具有最小的 Randić 指标。其中， S_n^+ 是指在星图 S_n 的两个悬挂点上加一条边得到的图。

定理 1.10 [5] 在 n 阶单圈图中，圈 C_n 具有最大的 Randić 指标。

本文考虑的是 k 悬挂点树关于连通度指标的极值问题。在 k 悬挂点的 n 阶树中，对于 $n < 3k-2$ 的具有最大 Randić 指标的极图情况复杂，我们从本文第三章所给的例子就可以看出。本文通过寻找适当的变换研究 n 个顶点 k 个悬挂点的树类中，在 $n < 3k-2$ 的条件下， Randić 指标的极大值和极大图结构性质。利用我们所得的性质来逼近极大图的结构特征，可以把一些具有最大的 Randić 指标且有 k 个悬挂点的 n 阶树缩小在一个很小的集合中，再通过比较将具有最大的 Randić 指标且有 k 个悬挂点的 n 阶树找出来。

第二章 k 悬挂点树关于 Randić 指标的极大图性质

§2.1 预备知识

在这一节里，我们首先介绍与本文有关的基本概念、符号和结论，为后面的定理做准备。以下一些名词和记号参考了 [2,11,12,25,26] 。

一个图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \psi_G)$，其中 $V(G)$ 是非空的顶点集，$E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集，而 ψ_G 是关联函数，它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对 (不必相异) 。若 e 是一条边，而 u 和 v 是使得 $\psi_G(e) = uv$ 的顶点，则称 e 连接 u 和 v ；顶点 u 和 v 称为 e 的端点。一条边的端点称为与这条边关联；与同一条边关联的两个顶点称为相邻的。

G 的顶点 u 的度 $d_G(u)$ 是指 G 中与 u 关联的边的数目。

Δ 表示 G 的顶点的最大度。

$N_G(u)$ 表示由 G 中所有与 u 相邻的顶点组成的集合。

$V_i(G) = \{v : v \in V(G), d_G(v) = i\}$, $n_i(G) = |V_i(G)|$ 。

$E_{ij}(G)= \{e : e = uv \in E(G),\ d_G(u) = i, d_G(v) = j\}$ 。

通常用 T 来表示一棵树，即无圈的连通图。T 中度为 1 的顶点称为 T 的悬挂点，连有悬挂点的边称为悬挂边。

令 $P_s = u_0u_1...u_s$ 是 T 中的一条路，其中 $d_T(u_1) = ... = d_T(u_{s-1}) = 2$（除非 $s = 1$ ）。若 $d_T(u_0) = 1$ 且 $d_T(u_s) \geq 3$, 那么称 P_s 是 T 的一条悬挂链; 若 $d_T(u_0), d_T(u_s) \geq 3$, 那么称 P_s 是 T 的一条内部链。

$\mathcal{T}_{n,k} = \{T : T$ 是有 k 个悬挂点的 n 阶树 $\}$ 。

$\mathcal{T}_{n,k,t} = \{T : T$ 是有 k 个悬挂点且 $\Delta = t$ 的 n 阶树 $\}$ 。

树 T 的 Randić 指标定义为 $R = R(T) = \sum\limits_{u,v} \frac{1}{\sqrt{d_T(u)d_T(v)}}$ 。

$R_T(u) = \sum\limits_{\omega \in N_T(u)} \frac{1}{\sqrt{d_T(\omega)}}$, $R_{max}(\mathcal{T}_{n,k}) = max\{R(T) : T \in \mathcal{T}_{n,k}\}$ 。

§2.2 k 悬挂点树关于 Randić 指标的极大图性质

在本节中，如无特别说明， Δ 均大于 4 。

定理 2.2.1[12] 假设 $T \in \mathcal{T}_{n,k}$ 并且 $R(T) = R_{max}(\mathcal{T}_{n,k})$ 。则 2 度点都在悬挂链上。

在 [12] 中的定理 1 证明了：假设 T 是 k 悬挂点的 n 阶化学树，且具有最大的 Randić 指标，则 2 度点都在悬挂链上。在证明过程中并没有用到 T 是化学树这一条件，因此利用相同的证明可以证得定理 2.2.1 。

定理 2.2.2 假设 $T \in \mathcal{T}_{n,k}$ 并且 $R(T) = R_{max}(\mathcal{T}_{n,k})$ 。如果 $P = \omega_1\omega_2...\omega_{l-1}\omega_l$ 是 T 中的一条路并且 $d_T(\omega_1) = i, d_T(\omega_l) = j, 3 \le j \le i \le \Delta$, 那么对于任意的 $1 \le k \le l$, 有 $j \le d_T(\omega_k) \le \Delta$ 。

证明: 假设 $\omega_k \in P(2 \le k \le l-1), d_T(\omega_k) < j$, 我们可从 P 中选取一段路 $\overline{P} = \omega_p\omega_{p+1}...\omega_k...\omega_{l-1}\omega_l(p \ge 1)$ 使得 $d_T(\omega_p) \ge j, d_T(\omega_{p+1}) < j$, 沿着 $\overline{P}$ 可找出一条路 $P' = \omega_p\omega_{p+1}...\omega_k...\omega_{l-1}\omega_l...\omega_t\omega_{t+1}(t \ge l), d_T(\omega_t) \ge j, d_T(\omega_{t+1}) < j$ 令 $\overline{T} = T - \{\omega_p\omega_{p+1}, \omega_t\omega_{t+1}\} + \{\omega_p\omega_t, \omega_{p+1}\omega_{t+1}\}$, 则 $\overline{T} \in \mathcal{T}_{n,k}$ 且

$$\begin{aligned}
R(\overline{T}) - R(T) &= -\frac{1}{\sqrt{d_T(\omega_p)d_T(\omega_{p+1})}} - \frac{1}{\sqrt{d_T(\omega_t)d_T(\omega_{t+1})}} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{d_T(\omega_p)d_T(\omega_t)}} + \frac{1}{\sqrt{d_T(\omega_{p+1})d_T(\omega_{t+1})}} \\
&= (\frac{1}{\sqrt{d_T(\omega_{t+1})}} - \frac{1}{\sqrt{d_T(\omega_p)}})(\frac{1}{\sqrt{d_T(\omega_{p+1})}} - \frac{1}{\sqrt{d_T(\omega_t)}}) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

因此 $R(\overline{T}) > R(T)$ 与我们已知的 $R(T) = R_{max}(\mathcal{T}_{n,k})$ 矛盾。

定理 2.2.3 假设 $T \in \mathcal{T}_{n,k}$ 并且 $R(T) = R_{max}(\mathcal{T}_{n,k})$ 。则或者 $E_{22}(T) = \emptyset$ 或者 $E_{13}(T) \cup E_{14}(T) \cup ... \cup E_{1\Delta}(T) = \emptyset$ 。

证明: 若 $E_{22}(T) \neq \emptyset$ 并且 $E_{13}(T) \cup E_{14}(T) \cup ... \cup E_{1\Delta}(T) \neq \emptyset$ 。假设 $e \in E_{22}$, 若 $E_{13} \cup ... \cup E_{1\Delta} \neq \emptyset$, 那么我们可以找到一条边 $uv \in E_{13} \cup ... \cup E_{1\Delta}, d_T(u) = 1, d_T(v) \ge 3$ 。